Exercice 1

On considère un oscillateur harmonique dont la position d'équilibre au temps $t = 0$ est $x = 0$. La position du point au cours du temps est ainsi décrite par la fonction

$$x(t) = A \sin(\omega t),$$

avec A l'amplitude et ω la vitesse angulaire.

Le dérivé temporaire de $x(t)$ donne l'expression de l'évolution de la vitesse du point au cours du temps :

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t).$$

La condition "ce point revient à sa position d'équilibre avec une vitesse de 1.57 m/s" peut être formulé mathématiquement que $v(t)$ =1.57 m/s quand $x(t)$=0. Avec le choix de la forme de $x(t)$, à $t = 0$ cette condition est remplie, et cela nous donne l'expression suivant :

$$v_0 = v(t = 0) = A\omega \;\Rightarrow\; \omega = \frac{v_0}{A}.$$

Ainsi on en déduit la fréquence vibrationnelle f telle que :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v_0}{2A\pi} = 500\ Hz.$$

Exercice 2

L'évolution de la position de la masse au cours du temps est donnée par

$$x(t) = A \sin(\omega t)$$

dont on peut dériver l'expression de la vitesse et de l'accélération, respectivement :

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t).$$

Sachant que lorsque $x(t) = 20$ cm alors $|a(t)| = 0.4$ on peut, par substitution de $x(t)$ dans l'expression de $a(t)$, isoler la fréquence angulaire ω telle que

$$\omega = \sqrt{\frac{|a|}{x}},$$

et en déduire la période d'oscillation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4.44s.$$

Exercice 3

(a) On résout l'équation $A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t) = 0$. Pour cela il faut que l'un au moins des deux termes dépendants de t soit nul. Comme la fonction $e^{-\gamma t}$ est toujours strictement positive, il faut donc que

$$\sin(\omega t) = 0 \;\Rightarrow\; \omega t = n\pi \;\Rightarrow\; t = \frac{n\pi}{\omega},$$

avec n un nombre entier.

(b) La courbe y (Fig. 1) sera au contact de $y_1 = A_0 e^{-\gamma t}$ aux instants t tels que

$$A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t) = A_0 e^{-\gamma t},$$

$$\sin(\omega t) = 1,$$

$$t = \frac{1}{2\omega}(\pi + 4\pi n),$$

avec n un nombre entier.

De même, au contact de $y_2 = -A_0 e^{-\gamma t}$

$$A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t) = -A_0 e^{-\gamma t},$$

$$\sin(\omega t) = -1,$$

$$t \;\; = \;\; \tfrac{1}{2\omega}(-\pi + 4\pi n).$$

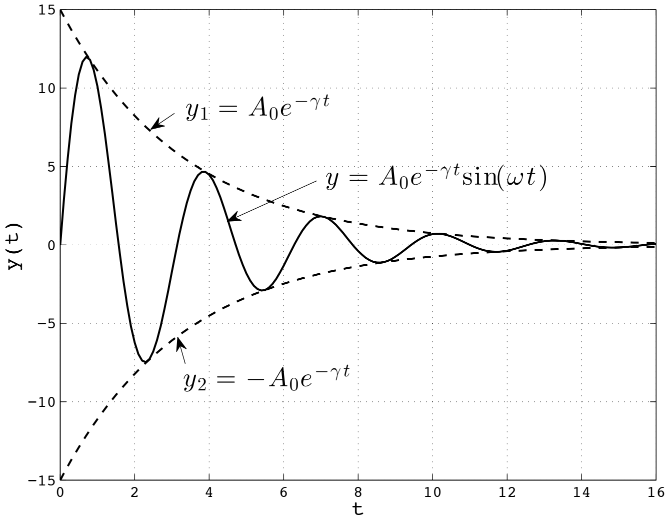

FIGURE 1 – Oscillations amorties

(c) L'expression de la vitesse s'obtient en dérivant la position y par rapport au temps :

$$v(t) = -\gamma A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t) + A_0 e^{-\gamma t} \omega \cos(\omega t)$$

$$v(t) = A_0 e^{-\gamma t} [\omega \cos(\omega t) - \gamma \sin(\omega t)].$$

Exercice 4

D'après le cours on sait que la tension F dans la corde est liée à la masse linéique m_l de cette dernière et à la vitesse c de l'onde qui la traverse par la relation suivante :

$$c = \sqrt{\frac{F}{m_l}}.$$

L'application numérique donne une tension

$$F = c^2 \; m_l = 1080 \; N.$$

Cette valeur est pertinente si l'on considère le fait qu'un piano ordinaire possède 88 touches.

Exercice 5

Pour une onde stationnaire traversant une corde de piano par exemple, on peut exprimer la longueur L de cette dernière en fonction de la longueur d'onde λ et le mode de vibration n de l'onde de sorte que

$$L = \frac{n\lambda}{2}.$$

Sachant que $\lambda = c/f$, avec c la vitesse de l'onde et f sa fréquence, on obtient que

$$L = \frac{nc}{2f}.$$

La note la plus haute est émise par une corde de longueur $L_1 = 15$ cm, à une fréquence $f_1 = 4186$ Hz. On cherche la longueur L_2 de la corde émettant l'onde de fréquence la plus grave à savoir $f_2 = 27.5$ Hz.

Si les cordes sont faites du même matériau et tendues avec la même force, la vitesse de l'onde dans chacune d'elle sera égale, de sorte que

$$L_2 = \frac{L_1 f_1}{f_2} = 22.8\ m.$$

Avec une corde de 22.8 m de long, ce piano est extrêmement grand et donc gourmand en espace. Une autre façon de changer la fréquence d'une onde, et donc la note produite lorsqu'on la frappe, est de changer la tension dans la corde en question (ce que l'on fait lorsque l'on accorde un instrument à cordes) est de changer sa masse linéique. Pour cette raison, les cordes graves sont gainées du cuivre, voir http ://www.artpianos.fr/filage.html.